

МАТЕМАТИЧНА КАРУСЕЛЬ

Тема: Текстові задачі

Мета: навчити учнів складати математичні моделі задач, розв'язувати їх та правильно інтерпретувати розв'язки

1. Задачі на рух

Слід підкреслити, що, розв'язуючи задачі на рух, ми вважаємо, що швидкості рухомих тіл стали на всьому проміжку шляху, тобто їх рух рівномірний, рух відбувається по прямій, зустріч відбувається в точці тощо.

Якщо рух на окремих ділянках вважається рівномірним, то пройдений шлях визначається за формулою $S=Vt$, де V – швидкість руху тіла, а t – час руху. Повороти тіл, що рухаються, вважаються миттєвими, тобто проходять без затрат часу, швидкість при цьому також змінюється миттєво.

При рівноприскореному русі найчастіше використовують дві формули, що зв'язують час t , пройдений шлях S , початкову швидкість V_0 , прискорення a і швидкість V : $S=V_0t+at^2/2$, $a=(V-V_0)/t$, де $a>0$, якщо рух рівноприскорений, і $a<0$, якщо рух рівносповільнений.

Зустрічний рух

1. Якщо два тіла рухаються назустріч одне одному з двох пунктів, то до зустрічі вони разом проходять усю відстань між цими пунктами.

2. При одночасному виході тіл з двох пунктів час їх руху до моменту зустрічі однаковий для обох тіл, і рівний $S/(V_1+V_2)$.

3. За одиницю часу рухомі тіла зближаються на відстань, що дорівнює сумі їх швидкостей (з розрахунку на цю саму одиницю часу).

Задача 1.1. З пунктів А і В, відстань між якими 160 км, одночасно на зустріч один одному виїхали велосипедист і мотоцикліст. Через дві години вони зустрілися і продовжили свій рух. Через півгодини після зустрічі велосипедисту залишилося проїхати відстань у 11 раз більшу ніж залишилося проїхати мотоциклісту. З якою швидкістю рухався мотоцикліст?

Розв'язання. Позначимо швидкість мотоцикліста через x км/год, а велосипедиста – відповідно y км/год. Зустрівшись через 2 год, велосипедист і мотоцикліст проїхали всю відстань від А до В (км), отже $(x+y) \cdot 2 = 160$.

За півгодини велосипедист проїхав $\frac{y}{2}$ (км), а мотоцикліст – $\frac{x}{2}$ (км).

Велосипедисту залишилося проїхати $2x - \frac{y}{2}$ (км), а мотоциклісту $2y - \frac{x}{2}$ (км).

За умовою задачі $2x - \frac{y}{2}$ в 11 раз більше, ніж $2y - \frac{x}{2}$. Отже друге рівняння:

$$2x - \frac{y}{2} = 11(2y - \frac{x}{2}).$$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x+y) \cdot 2 = 160, \\ 2x - \frac{y}{2} = 11(2y - \frac{x}{2}). \end{cases}$$

Звідки $x=60$, $y=20$.

Відповідь. 60 км/год.

Рух в одному напрямку.

1. Одне рухоме тіло може догнати друге лише тоді, коли швидкість його більша за швидкість тіла, яке рухається попереду.

2. Якщо два тіла, відокремлені певною відстанню, рухаються в одному напрямку, ця відстань з кожною годиною (хвилиною, секундою) зменшується і перетворюється в нуль, коли тіло з більшою швидкістю доганяє тіло, яке має меншу швидкість. Зменшення відстані між тілами за одиницю часу дорівнює різниці швидкостей тіл.

3. При одночасному виході з одного й того ж самого пункту й руху в одному напрямку тіл, що мають неоднакову швидкість, відстань між ними з кожною годиною (хвилиною, секундою) збільшується. Збільшення відстані між рухомими тілами за одиницю часу дорівнює різниці їх швидкостей.

4. Одне тіло дожене або випередить друге за стільки годин (хвилин, секунд), скільки разів різниця між швидкостями цих тіл міститься у відстані, що їх розділяє. Якщо $V_1 > V_2$, то перше тіло дожене друге за час, рівний $S/(V_1 - V_2)$.

Рух по колу

Якщо два тіла рухаються по колу радіуса R із сталими швидкостями V_1 і V_2 в різних напрямках, то час між їхніми зустрічами обчислюється за формулою $2\pi R/(V_1 + V_2)$.

Якщо два тіла рухаються по колу радіуса R із сталими швидкостями V_1 і V_2 ($V_1 > V_2$) в одному напрямку, то час між їхніми зустрічами обчислюється за формулою $2\pi R/(V_1 - V_2)$.

Рух за течією і проти течії

Якщо тіло рухається за течією річки, то його швидкість v (відносно берега) складається із швидкості тіла в стоячій воді $V_{вл}$ (власна швидкість тіла) і швидкості течії річки $V_{теч}$: $V = V_{вл} + V_{теч}$, а якщо тіло рухається проти течії річки, то його швидкість (відносно берега) $V = V_{вл} - V_{теч}$. Якщо в умові задачі мова йде про рух плотів, то вважають, що пліт рухається зі швидкістю течії річки.

Задача 1.3. За 4 години за течією річки човен проходить той же шлях, що й за 5 годин проти течії. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії річки, якщо шлях 70 км човен подолає за течією річки за 3 год 30 хв.

Розв'язання. Позначимо шукані й допоміжні невідомі величини. Нехай x – власна швидкість човна, а y – швидкість течії. Тоді $x + y$ – швидкість човна за течією, $x - y$ – швидкість човна проти течії.

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4(x + y) = 5(x - y), \\ 3,5(x + y) = 70. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо

$$\begin{cases} 4x + 4y - 5x + 5y = 0, \\ x + y = 20. \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 9y = 0, \\ x + y = 20. \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 18, \\ y = 2. \end{matrix}$$

Відповідь: власна швидкість човна 18 км/год, швидкість течії 2 км/год.

2. Задачі на роботу і продуктивність праці

Рівняння або система рівнянь, які слід скласти за умовою задачі на роботу, як правило, містять наступні величини: час t , протягом якого проводиться робота, продуктивність N – роботу, виконану за одиницю часу, і власне роботу A , виконану за час t . Формула має вигляд $A = N \cdot t$.

У задачах на “спільну роботу” необхідно забезпечити чітку послідовність в переході від основних величин до величин їм обернених, і до оперування цими величинами під час складання порівнюваних виразів, рівнянь чи їх систем.

Розглянемо зразки задач.

Спільна робота двох комбайнерів.

Задача 2.1. Спочатку на ділянці збирав урожай один комбайнер. Через 4 години до нього приєднався другий і за 8 годин спільної роботи вони закінчили збирати урожай з ділянки. За скільки годин міг би зібрати врожай з ділянки кожний комбайнер, працюючи окремо, коли відомо, що першому потрібно було для цього на 8 год більше, ніж другому?

Хід розв’язування краще показати в таблиці:

Питання	I комбайнер	II комбайнер	Разом
1. За скільки годин виконають усю роботу?	x	$x-8$	
2. Яку частину роботи виконають за 1 год?	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-8}$	
3. Скільки годин працювали?	$4+8$	8	8
4. Яку частину роботи виконали?	$\frac{12}{x}$	$\frac{8}{x-8}$	1

Складаємо рівняння: $\frac{12}{x} + \frac{8}{x-8} = 1$.

Звідси $x_1=4$, $x_2=24$.

Корінь $x=4$ умову задачі не задовольняє, тому перший комбайнер міг би зібрати самостійно урожай з ділянки за 24 год, а другий – за 16 год.

Відповідь: 24 год і 16 год.

Спільна робота двох друкарок.

Задача 2.2. Після 2 год спільної роботи двох друкарок одній з них дали інше завдання, а друга сама закінчила роботу через 1 год 20 хв. За скільки годин могла б передрукувати рукопис кожна друкарка, якщо другій на це потрібно було б на 1 год 10 хв більше часу, ніж першій?

Розв’язання. Через x позначимо кількість годин, за яку перша друкарка могла б передрукувати рукопис. Тоді за умовою задачі другій друкарці потрібно $(x + 1 \frac{1}{6})$ год ($1 \text{ год } 10 \text{ хв} = 1 \frac{1}{6} \text{ год}$).

Визначимо, яку частину роботи виконає кожна друкарка за 1 год.

I друкарка за 1 год виконає $\frac{1}{x}$ частину роботи,

II друкарка за 1 год виконає $\frac{1}{x+1\frac{1}{6}}$ частину роботи.

За дві години спільної роботи дві друкарки передрукують $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1\frac{1}{6}}\right) \cdot 2$

частину рукопису.

II друкарка, закінчуючи роботу, передрукувала $\frac{1}{x+1\frac{1}{6}} \cdot 1\frac{1}{3}$ (1 год 20хв = $1\frac{1}{3}$ год)

частину рукопису.

Приймаючи обсяг всієї роботи за 1, складемо рівняння:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1\frac{1}{6}}\right) \cdot 2 + 1\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1\frac{1}{6}} = 1.$$

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{x+\frac{7}{6}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x+\frac{7}{6}} = 1,$$

$$\frac{2}{x} + \frac{12}{6x+7} + \frac{8}{6x+7} = 1,$$

$$2(6x+7) + 20x = 6x^2 + 7x; \quad 6x^2 - 25x - 14 = 0;$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 336}}{12}; \quad x = \frac{25 \pm 31}{12};$$

Отже, перша друкарка могла б передрукувати рукопис за $4\frac{2}{3}$ години.

Друга друкарка виконала б цю саму роботу за $4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{6} = 5\frac{5}{6}$ (год).

Відповідь: 4 год 40 хв, 5 год 50 хв.

Зауваження. Для перевірки правильності розв'язання задачі доцільно розв'язати її іншим способом, вибравши за основне невідоме час, за який могла передрукувати рукопис друга друкарка.

Виготовлення верстатів двома заводами.

Задача 2.3. Один завод мав виготовити 720 верстатів, а другий за той самий строк – 660 верстатів. Перший завод, виготовляючи щодня на 10 верстатів більше від другого, виконав замовлення на два дні раніше строку, а другий завод, виготовивши 22 верстати понад план, закінчив роботу на один день раніше строку. Скільки верстатів виготовляв щодня кожний завод?

Розв'язання. Позначимо через x кількість верстатів, що їх щодня виготовляв другий завод. Тоді, за умовою задачі, кількість верстатів, які виготовляв щоденно перший завод, буде $x+10$. За цих умов перший завод виконав замовлення за $\frac{720}{x+10}$ днів, а другий завод працював $\frac{682}{x}$ днів ($660+22=682$). Перший завод виконав замовлення на 2 дні раніше строку, тобто робота була розрахована на $\left(\frac{720}{x+10} + 2\right)$ днів. Другий завод закінчив роботу на один день раніше строку, тобто робота була розрахована на

$\left(\frac{682}{x}+1\right)$ днів. Для обох заводів було встановлено однаковий строк виконання замовлення, отже, маємо рівняння:

$$\begin{aligned}\frac{720}{x+10}+2 &= \frac{682}{x}+1, \\ \frac{720}{x+10}-\frac{682}{x}+1 &= 0, \\ 720x-682x-6820+x^2+10x &= 0, \\ x^2+48x-6820 &= 0, \\ x_1=62, x_2 &=-110.\end{aligned}$$

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, $x=62$, тобто другий завод щодня виготовляв 62 верстати. Перший завод щоденно виготовляв $62+10=72$ (верстати).

Відповідь: 72 верстати, 62 верстати.

3. Задачі на змішування.

Задачі на змішування (суміші, розчини, сплави) досить часто зустрічаються на практиці, і, як показує досвід, викликають у студентів певні труднощі при розв'язанні.

Умовно розрізняють два види задач на змішування:

- 1) задачі на змішування першого роду;
- 2) задачі на змішування другого роду.

Найхарактернішими задачами на змішування першого роду є задачі на знаходження середньої ціни, середньої температури, середньої швидкості, середнього часу та ін. У цих задачах треба визначити “ціну” суміші за даними “цінами” і кількостями окремих сортів (слово “ціна” тут вжито в широкому розумінні). Отже, мова йде про знаходження середнього арифметичного певної суми доданків, узятих групами (кажуть також “середнього зваженого”). Шуканим може бути не лише середнє арифметичне, а й ціна одного з сортів. Відомі задачі на знаходження середнього арифметичного кількох чисел є окремим випадком названих вище задач.

Задача 3.1. Знайти середню ранішню температуру повітря в другій декаді вересня, якщо протягом чотирьох днів у цей час термометр показував 10° , протягом трьох днів 12° , протягом двох днів 9° і один день температура була 14° .

Запис розв'язування задачі можна подати у вигляді числового виразу:

$$\frac{10^\circ \cdot 4 + 12^\circ \cdot 3 + 9^\circ \cdot 2 + 14^\circ}{4 + 3 + 2 + 1} = 10,8^\circ.$$

У задачах на змішування другого роду найчастіше відомі “ціни” окремих сортів, “ціна” та кількість суміші, а треба визначити кількості взятих для суміші сортів. Видозміною цих задач є такі, в яких шуканою є кількість одного з сортів, що входять до суміші. Наприклад:

Задача 3.2. Один кілограм товару першого сорту коштує 7,2 грн, а 1 кг іншого товару коштує 8,4 грн. Скільки кілограмів товару кожного сорту треба взяти, щоб вийшло 120 кг суміші, кожний кілограм якої коштує 7,5 грн?

Розв'язування задачі зводиться до складання рівнянь, причому її можна розв'язати і складанням системи двох рівнянь з двома невідомими, і відповідно рівняння з одним невідомим.

1. Нехай x (кг) маса товару першого сорту, y (кг) – другого сорту.

Для визначення x і y складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 120, \\ \frac{7,2x + 8,4y}{x + y} = 7,5. \end{cases}$$

2. Нехай x (кг) – маса товару першого сорту, тоді за умовою задачі маса товару другого сорту буде $(120-x)$ кг.

Складаємо рівняння:

$$\frac{7,2x + 8,4y(120-x)}{x + (120-x)} = 7,5.$$

Відповідь: 90 кг і 30 кг.

Задачі на розчини.

В умовах задач на розчини фігурує термін “концентрація”. Необхідно пояснити зміст цього поняття. Якщо m – маса розчиненої речовини, n – маса розчину, то відношення $\frac{m}{n}$, подане в процентах, називають концентрацією розчину.

Якщо позначити концентрацію буквою C , то для її визначення можна скористатися формулою

$$C = \frac{m}{n} \cdot 100\% \quad (1)$$

Концентрацію розчину можна виразити не тільки в процентах, а й у частинах. Кажуть, наприклад, що концентрація солі у морській воді дорівнює $\frac{1}{20}$ (за масою).

Для зручності розв'язування задач на розчини можна користуватися формулою, яку неважко вивести.

Нехай маємо два розчини однієї і тієї самої речовини. Концентрація першого розчину дорівнює C_1 , а його маса n_1 ; відповідно для другого розчину C_2 і n_2 . Важливо підкреслити, що n_1 і n_2 мають бути в одних і тих самих одиницях.

За формулою $C = \frac{m}{n} \cdot 100\%$ знаходимо масу речовини в розчині: $m = \frac{n}{100} \cdot C$

Маса речовини в першому розчині: $m_1 = \frac{n_1}{100} \cdot C_1$, у другому розчині: $\frac{n_2}{100} \cdot C_2$.

Отже, у розчині масою $n_1 + n_2$ маса речовини становить $\frac{n_1}{100} \cdot C_1 + \frac{n_2}{100} \cdot C_2$, тобто концентрація C суміші дорівнює

$$C = \frac{\frac{n_1 C_1}{100} + \frac{n_2 C_2}{100}}{n_1 + n_2} \cdot 100,$$

$$\boxed{C = \frac{n_1 C_1 + n_2 C_2}{n_1 + n_2}} \quad (2)$$

Зауваження. Концентрація суміші, утвореної з k розчинів однієї й тієї самої речовини, обчислюється за формулою:

$$C = \frac{n_1 C_1 + n_2 C_2 + \dots + n_k C_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \quad (3)$$

Під час розв'язування задач не обов'язково користуватися готовою формулою. Можна поступово виконувати розрахунки, пов'язані з визначенням маси розчину і маси розчиненої речовини, і користуватися поняттям концентрації.

Задача 3.3. У посудині 10,5 л 40%-ного розчину сірчаної кислоти. Скільки треба влити в посудину 75%-ного розчину тієї самої кислоти, щоб вийшов 50%-ний розчин?

Розв'язання.

Позначивши через x л шуканий об'єм 75%-ного розчину кислоти, складаємо рівняння (за формулою (2)):

$$\frac{10,5 \cdot 40 + 75x}{10,5 + x} = 50,$$

звідки $x=4,2$ л.

Відповідь: 4,2 л.

Зауваження. Розв'язуючи задачі на концентрацію кислот і сплавів, треба пам'ятати, що міцність кислоти або спирту звичайно виражається в сотих долях, або процентах, які в цьому випадку називають градусами.

Задачі на сплави.

Сплав можна розглядати як розчин, в якому один з компонентів (довільний) є розчинник, а другий розчинна речовина.

Задача 3.4. 1 см³ одного металу важить 7,2 г, а 1 см³ іншого металу важить 8,4 г. Скільки кубічних сантиметрів кожного металу треба взяти, щоб дістати 1500 см³ сплаву, кожний кубічний сантиметр якого важить 7,5 г?

Розв'язання.

Нехай для утворення сплаву треба взяти x см³ одного металу і y см³ іншого металу.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 1500, \\ \frac{7,2x + 8,4y}{x + y} = 7,5 \end{cases}$$

звідки $x=1125$ г, $y=375$ г.

Відповідь: 1125 г, 375 г.

Зауваження. Серед задач на сплави окреме місце займають задачі на “проби”. Слід пояснити, що пробою дорогоцінних металів називається вагомий вміст золота, срібла або платини в одиниці сплаву, з якого виготовлено ювелірний виріб або викарбовано монету (від латинського слова *probo* – випробовую, оцінюю).

Проби сплавів дорогоцінних металів, з яких дозволяється виготовляти ювелірні вироби, в кожній країні встановлюються законодавчим шляхом.

У більшості країн загальноприйнятою є метрична система позначення проб (у нашій країні її було запроваджено в 1926 р.).

За цією системою, пробою є число грамів золота, срібла або платини в 1000 г лігатурної (*ligo* – зв’язую) маси сплаву, причому чистому металу відповідає тисячна проба.

Отже, пробою називається число грамів чистого золота, срібла або платини в одному кілограмі сплаву.

В Україні для ювелірних виробів встановлено такі проби:

для золота – 375; 500; 583; 750 і 958;

для срібла – 800; 875; 916;

для платини – 590.

Задача 3.5. Сплавлено два зливки срібла; один 600-ї проби масою 180 г і другий 875-ї проби масою 216 г. Визначити пробу сплаву.

Це типова задача на знаходження середнього арифметичного, яка розв’язується складанням числового виразу:

$$\frac{180 \cdot 600 + 216 \cdot 875}{180 + 216}.$$

Задача 3.6. Є сплав 850-ї проби, маса якого становить 1500г. Скільки до нього треба додати сплаву 920-ї проби, щоб вийшов сплав 900-ї проби?

Розв’язання.

Нехай сплаву 920-ї проби треба взяти x г.

Складаємо рівняння: $\frac{1500 \cdot 850 + 920x}{1500 + x} = 900$,

звідки $x=3750$ г.

Відповідь: 3750 г.

Як бачимо, за своїм змістом задачі на проби є задачами на змішування першого і другого роду.

Зауваження. У задачах на розчини (сплави) часто фігурують відношення, в яких певні метали входять у сплав. Наприклад, якщо сказано, що деякий сплав складається з двох металів, які входять у відношенні 2:3, то концентрація першого металу в цьому сплаві дорівнює $\frac{2}{5}$, а другого $\frac{3}{5}$.

Розрахунки проводяться за формулою (2) у частинах.

Задача 3.7. Є два сплави міді і заліза. В одному кількості цих металів знаходяться у відношенні 2:3, а в другому – у відношенні 3:7. Скільки треба взяти кожного сплаву, щоб дістати 8 кг нового сплаву, до якого мідь і залізо входили б у відношенні 5:11?

Розв’язання.

Нехай x кг – маса частини першого сплаву, а y кг – другого. Частина міді в першому сплаві становить $\frac{2}{5}$, а в другому $\frac{3}{10}$; частина міді в новому сплаві становить $\frac{5}{16}$.

$$\text{Маємо систему рівнянь: } \begin{cases} x + y = 8, \\ x \cdot \frac{2}{5} + y \cdot \frac{3}{10} = \frac{5}{6} \cdot (x + y). \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, дістанемо: $x=1$ і $y=7$, тобто для утворення нового сплаву треба взяти 1 кг першого сплаву і 7 кг другого.

Зауваження. Якщо у формулі (2) поділити чисельник і знаменник правої частини на n_2 , то дістанемо формулу

$$C = \frac{\frac{n_1 C_1}{n_2} + C_2}{\frac{n_1}{n_2} + 1} \quad (4)$$

З формули (4) видно, що концентрація суміші двох розчинів (сплавів) залежить тільки від того, в якому відношенні увійдуть до суміші компоненти.

Задача 3.8. Сплав складається з двох металів, які входять до нього у відношенні 1:3, а другий сплав містить ті самі метали у відношенні 3:5. У якому відношенні треба взяти частини цих сплавів, щоб дістати третій сплав, який містить ті самі метали у відношенні 7:18?

Розв'язання.

Вміст першого металу в першому, другому і третьому сплавах дорівнює відповідно $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{25}$.

Позначимо через x і y маси частин першого і другого сплавів, які ввійшли до третього сплаву.

Складаємо рівняння:

$$\frac{x \cdot \frac{1}{4} + y \cdot \frac{3}{8}}{x + y} = \frac{7}{25}.$$

Знаходимо з цього рівняння відношення $x : y$:

$$x : y = 19 : 6.$$

Отже, на 19 частин першого сплаву треба взяти 6 частин другого.

Відповідь: 19:6.

4.Відшукування невідомих чисел.

Задача 4.1. Знайдіть двоцифрове число, у якого різниця між останньою цифрою й першою рівна 3, а добуток самого числа на суму його цифр рівний 70.

Розв'язання.

Нехай у шуканому числі x десятків і y одиниць. Тоді це число можна записати у вигляді $10x + y$. За умовою задачі складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y - x = 3, \\ (10x + y) \cdot (x + y) = 70, \end{cases}$$

яка зводиться до розв'язування квадратного рівняння: $22x^2 + 39x - 61 = 0$, звідки

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{61}{22}.$$

Корінь x_2 не задовольняє умову задачі, отже, $x=1$, тобто у шуканому числі один десяток. Число одиниць дорівнює 4, а шукане двоцифрове число є 14.

Перевірка. Сума цифр шуканого числа дорівнює 5, а добуток числа на суму його цифр дорівнює 70, як і дано в умові задачі.

Відповідь: 14.